**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**«ТВЕРСКОЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»**

****

*Дифференциальные*

*уравнения*

*методическое пособие по математике*

**Преподаватель математики**

**Верина Галина Борисовна**

**ТВЕРЬ**

 **2018**

**Пояснительная записка.**

В данной методической разработке по дисциплине «Математика» содержится теоретический материал по теме «Дифференциальные уравнения».

Целью данного пособия является дать обучающимся углублённые понятия о дифференциальных уравнениях, а также алгоритмы решения таких уравнений различных порядков.

По мере прочтения методички студент узнает что такое дифференциальное уравнение, его виды, а также научится решать дифференциальные уравнения различных порядков.

**Методическая разработка.**

№ 1

***Определение 1.*** *Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, её функцию и производные различных порядков этой функции.*

Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка. Ғ(х, у, у′, у ״ … у(n)) = 0 **(1)**

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной в него входящей.

**Примеры:**

у′ + 2sin у **∙** х = 2 – дифференциальное уравнение I-го порядка

у״ + cos х **∙** у′ + sin у = 0 – дифференциальное уравнение II-го порядка

***Определение 2.*** *Любая функция у = φ(х), которая удовлетворяет данному дифференциальному уравнению (I), т.е. обращает его в тождество при замене у и его производных на φ(х) и её производные называется решением дифференциального уравнения.*

**Замечание 1.** Если искомая функция у = φ(х) зависит от одной переменной то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

**Замечание 2.** Если искомое решение получено в неявном виде, то это интеграл уравнения.

График решения обыкновенного дифференциального уравнения I-го порядка называется интегральной кривой этого уравнения.

Термин проигнорировать дифференциальное уравнение означает найти те или иные его решения.

***Определение 3.*** *Общим решением дифференциального уравнения (I) называется такое его решение: у = φ(х, C1, C2, … , Cn), – которое содержит столько независимых произвольных постоянных C1, C2, … , Cn, каков порядок этого уравнения.*

Если общее решение задано в неявном виде φ(х, у, C1, C2, … , Cn) = 0, то его называют общим интегралом.

№ 2

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

Ғ(х, у, у′) = 0 **(2)**

или у′ = ƒ(х, у) – форма дифференциального уравнения разрешённого относительно производной.

M (х, у) dx + N (х, у) dy = 0 – форма дифференциального уравнения в дифференциалах.

***Определение 1.*** *Общим решением дифференциального уравнения (2) называется такая функция φ(х, C) двух аргументов х и C, которая при постоянном C рассматривается как функция одного переменного. Решения φ(х, C0), которые получаются из общего решения φ(х, C) при нахождении постоянной C = C0, называются его частными решениями.*

 у

 c1

м0  c0

c

м

y

α

х х

На рисунке изображено семейство кривых, т.е. совокупность линий соответствующих различным значениям постоянных с. Интегральные кривые обладают свойством, что в каждой их точке

M(х, у) наклон касательной удовлетворяет условию: tg α = ƒ(х, у).

Если задана точка М(х0, у0), то из бесконечного семейства интегральных кривых выделяется одна интегральная кривая, которая соответствует частному решению дифференциального уравнения. Это означает наличие начального условия y = y0 при х = х0. Для известного общего решения

у = φ(х, C), можно найти у0 = φ(х0, С), что позволяет определить C и найти частное решение.

Дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями называется задача Коши:

Найти решение у = φ(х) дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее данному начальному уравнению у0 = φ(х0, c), т.е. принимающее при х = х0, заданное значение у = у0.

**Замечание 1.** Если решение дифференциального уравнения не может быть получено из общего ни при каких начальных условиях оно называется особым.

№ 3

1) Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными:

ƒ1(х)dх = ƒ2(у)dу,

где множителем при dx является функция, зависящая только от х, а множителем при dy-функция, зависящая только от у.

Решение находится методом интегрирования обеих частей.

∫ƒ1(х)dх = ∫ƒ2(у)dу + C

**Пример 1.** 2хdх – (5у4 + cos у) dy = 0

**∫** 2xdx = ∫(5y4 + cos y) dy

x2 = y5 + sin y + C – общий интеграл.

2) Дифференциальные уравнения вида у′ = ƒ1(х) ƒ2(у), где правая часть представляет собой произведение двух функций, из которых одна не зависит от х, а вторая не зависит от у, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Метод решения: ∫ ($\frac{dу}{ƒ2(y)}$) = ∫ ƒ1(х) dx + C

**Пример 2.** 2х + $\frac{у'}{y}$ = 0

у′ = $\frac{dу}{dx}$ ; умножаем на dx обе части уравнения

2хdx + $\frac{dу}{y}$= 0 ∫ 2xdx + ∫ ($\frac{dу}{y}$) = 0

x2 + ln y = C –общий интеграл

ln y = C – x2 ; eC – x2 = y – общее решение

3) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, записанные в форме дифференциалов:

ƒ1(х) ƒ2(у) dx + ƒ3(x)ƒ4(y) dy = 0 или у′ = ƒ1(х) **∙** ƒ2(у)

Для решения таких дифференциальных уравнений их надо привести к виду 1, т.е. к дифференциальным уравнениям с разделёнными переменными.

∫ ($\frac{ƒ1(х) }{ƒ3(х)}$) dx + ∫ ($\frac{ƒ4(y) }{ƒ2(y)}$) dy = C

**Пример 3.** 2х sin ydx – (x2 + 3) cos ydy = 0

2x sin ydx = (x2 + 3) cos ydy

Разделим на произведение sin y(x2 + 3)

$\frac{2x sin ydx}{sin y(x2 + 3)}$ = (x2 + 3) $\frac{cos ydy}{sin y(x2 + 3)}$ → $\frac{2xdx}{x2}$ + 3 = $\frac{cos ydy}{sin y}$

Проинтегрируем полученные выражения

∫ ($\frac{2xdx}{(x2 + 3)}$) = ∫ ($\frac{cos ydy}{sin y}$) → ln |x2 + 3| = ln |sin y| + ln C

по свойству логарифмов (х2 + 3) = C ∙sin y – общий интеграл дифференциального уравнения.

***Определение 1.*** *Функция ƒ(х, у) называется однородной функцией n-го измерения, если при замене в ней переменных х и у соответственно на tx и ty, где t – произвольная величина (параметр) получается та же функция, умноженная на tn , т.е. если выполняется условие:*

*ƒ(tx, ty) = tn* ***∙*** *ƒ(x, y)*

где n – степень однородности уравнения

Однородная функция степени n представима в виде ƒ(х, у) = хn φ($\frac{у}{x}$)

Однородная функция нулевой степени может быть записана в виде ƒ(х, у) = φ ($\frac{у}{x}$)

***Определение 2.*** *Если функции М(х, у) и N(х, у) – однородные одной и той же степени n, то дифференциальное уравнение М(х, у) dx + N(x, y) dy = 0*  **(3)**

*называется однородным.*

Например, уравнение (х2 + у2) dx + x2 dy = 0 является однородным, поскольку функции х2 + у2 и х2 являются однородными. (Проверьте самостоятельно). Уравнение у′= ƒ(х, у) называется однородным, если оно имеет вид: у′ = φ ($\frac{у}{x}$) **(4)**

Очевидно, что ƒ(х, у) – однородная функция нулевого измерения.

Уравнения (3) и (4) приводятся к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки.

t = $\frac{у}{x}$ т.е. y = t **∙** x и y′ = t′x + t, или в дифференциалах dy = tdx + xdt

**Пример 4.** y′ = $\frac{у}{x}$ + tg($\frac{у}{x}$); y′ = $\frac{dу}{dx}$

Использовав замену переменных имеем t′x + t = t + tg t. Далее t′x = t + tg t – t

t′x = tg t, т.к. t′ = $\frac{dt}{dx}$, то $\frac{dt}{dx}$ = $\frac{tg t}{x}$. Разделив переменные получим ∫ ($\frac{dx}{x}$)=∫ ($\frac{dt}{tg t}$) и после интегрирования
ln x = ln |cos t| + ln |C|

Применив свойства логарифмов получим x = cos t **∙** C, а теперь вернёмся к исходной функции и получим общий интеграл уравнения x = C **∙** cos $\frac{у}{x}$

Другой способ: dy = ($\frac{у}{x}$ + tg $\frac{у}{x}$)dx, воспользуемся заменой tg x + xdt = (t +tg t)dx, приведём подобные по дифференциалам td x – td x – tg tdx = xdt = tdx + tg tdx – tdx; xdt = tg tdx, разделив переменные и проинтегрировав, получим тот же ответ.

№ 4

***Определение 1.*** *Линейным дифференциальным уравнением I-го порядка называется такое дифференциальное уравнение, в которое неизвестные функции у и у′ входят в первых степенях и не перемножаются между собой.*

Общий вид линейного уравнения первого порядка:

у′ + Р(х) **∙** у = Q (x) **(5)**

Если Q(x) = 0, то уравнение (5) – линейное однородное и одновременно с разделяющимися переменными.

Методы решения: метод Бернулли и метод Лагранжа

а) Метод Бернулли

1) Будем искать решение в виде у = U **∙** V, тогда у′ = U′V + V′U или dy = Vdu + Udv (это подстановка Бернулли, где V – вспомогательная функция).

**Пример 1.** ху′ – 2у = 2х4; x(U′V + V′U) – 2UV = 2x4; xU′V + xV′U – 2UV = 2x4

2) xU′V + U(xV′ – 2V) = 2x4 – найдём функцию V таким образом, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

xV′ – 2V = 0

x($\frac{dV}{dx}$) =2V

$\frac{dV}{V}$ = 2($\frac{dx}{x}$)

Интегрируя уравнение, получаем ln V = ln x2 → V = x2. Поскольку функция V выбрана, чтобы удовлетворять определённому условию мы опускаем постоянную С. Полученное выражение подставляем в исходное уравнение (пункт 2).

x **∙** $\frac{dU}{dx}$ **∙** x2 = 2x4

$\frac{dU}{dx}$ = x → U = ∫ xdx = x2 + C

Объединив полученные выражения для V и U в постановке Бернулли мы получим окончательное общее решение уравнения у = х2 (х2 + С).

б) Метод вариации произвольной постоянной (Метод Лагранжа)

Покажем применение метода на том же примере.

1) ху′ – 2у = 2х4

Сначала решаем данное уравнение без правой части: ху′ – 2у = 0.

xdy – 2 ydx = 0 → $\frac{dy}{y}$ – 2($\frac{dx}{x}$) = 0 → ln y = 2 ln x + ln C → y = C **∙** x2

Пусть С = С(х) – некоторая неизвестная функция в уравнение (1), тогда у = х2 **∙** С(х) и

у′ = 2х **∙** С(х) + х2 **∙** С′(х). Подставляем в исходное уравнение

х **∙** 2х **∙** С(х) + х **∙** х2 **∙** С′(х) – 2х2 С(х) = 2x4 ÷ (x 2)

2С(х) + х **∙** С′(х) – 2С(х) = 2х2

С′(х) = 2х → С(х) = ∫ 2 xdx = x2 + C

Подставляем полученное выражение в у = С(х) **∙** х2 и получаем окончательное решение

у = х2 (х2 + С).

в) Уравнение Бернулли

Имеет вид: y′ + α(x)y = b(x) **∙** yn, слева линейное выражение, а справа присутствует множитель

yn (n = const).

Применив подстановку z(x) = $\frac{I}{y n – I}$ и $\frac{dz}{dz}$ = z′ = (I – n) **∙** y– n **∙** y′, получим дифференциальное уравнение вида y′ **∙** y– n + α(x) **∙** y– (n – I) = b(x) или z′ + (I – n) **∙** α(x) **∙** z = (I – n) **∙** b(x). Это линейное уравнение I-го порядка. Для его решения применяем, например, подстановку Бернулли.

**Пример 1.** y′ + 2y = y2 **∙** ex (÷ y2)

y′ **∙** y – 2 + 2y – I = e x

z = $\frac{I}{y 2 – I}$ = $\frac{I}{y}$

**Найдём:** $\frac{dz}{dx}$ = – $\frac{I}{y2}$ **∙** $\frac{dy}{dx}$ → $\frac{dy}{dx}$ = $\frac{dz}{dx}$ **∙** (– y2)

$\frac{dz}{dx}$ (– y2) **∙** y– 2 + 2 **∙** z = ex

– $\frac{dz}{dx}$ + 2z = ex

–z′ + 2z = ex

Применяем подстановку Бернулли

z = U **∙** V → z′ = U′V + V′U

(1) – U′V – V′U + 2UV = ex

V (–U′ + 2U) – V′U = ex

In |U| = 2x → e2x = U → (1)

U′ = 2U → $\frac{dU}{U}$ = 2dx → ln |U **∙** C| = 2x → C = I

$\frac{dV}{dx}$ **∙** e2x = ex → dU = e– x dx → U = – e– x + C

Z = e2x (C – e2x) → y = $\frac{I}{e2x}$ (C – e2x)

№ 5

***Определение 1.*** *Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение вида: M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. Если в области D определения функции М(х, у) и N(x, y) и существования решения дифференциального уравнения выполняется равенство* $\frac{∂M(x, y)}{∂y}$ = $\frac{∂M(x, y)}{∂x}$

Общий интеграл дифференциального уравнения U (x, y) = C ищем в виде а) или б)

a) U(x, y) = ∫ M(x, yc) dx + φ(y)

b U(x, y) = ∫ N(x, y) dy + φ(x)

неизвестные φ(у) и φ(х) находят из второго условия

**Пример 1.** (3x2 y + y2) dx + (x3 + 2xy + 10y) dy = 0

M(x, y) = 3x2 y + y2  N(x, y) = x3 + 2xy + 10y

Общий интеграл: U(x, y) = ∫ (3x2 y + y2) dx + φ(y) = x3 y + y2 x + φ(y)

ищем в виде а) $\frac{du}{dy}$ = 2xy + x3 + φ′(y) = x3 + 2xy + 10y значит φ′(у) = 10у, отсюда:

φ(у) = 5у2 + С U(x, y) = x3 y + xy2 + 5y2 + C – решение.

№ 6

***Определение 1.*** *Все дифференциальные уравнения порядка выше первого называют дифференциальными уравнениями высших порядков.*

Общий вид: F(x, y, y′ … y(n)) = 0 **(1)**

В форме, разрешённой относительно старшей производной: y(n) = ƒ(x, y, y′ … y(n – I)) **(2)**

Общее решение будет зависеть от произвольных постоянных. Для выделения частного решения задаются дополнительные условия. Для уравнения n-го порядка в качестве начальных условий задают значения искомой функции и всех её производных до (n – I) порядка включительно, т. е:

x = x0; y = y0; y′ = y0; … y(n – I) = y0(n – I) **(3)**

Система (3) – система начальных условий.

***Определение 2.*** *Задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющую системе начальных условий (3), называют задачей Коши*.

№ 7

1) Уравнения вида: y(n) = ƒ(x)

Порядок понижается путём непосредственного интегрирования. y(n – I) = ∫ƒ(x)dx + C1

**Пример 1.** y′′′ = 3x2

y′′ = ∫ 3x2 dx = x3 + C1

y′ = $\frac{x4}{4}$ + C1x + C2

y = $\frac{x5}{20}$ + $\frac{C1x2}{2}$ + C2x + C3 – общее решение.

Заметим, что количество постоянных С1 в общем решении всегда равно порядку исходного дифференциального уравнения.

2) Уравнения, не содержащие искомой функции у т. е. вида: F(x, y′, y′′) = 0

Метод решения:

Вводится новая неизвестная функция

z(x) = y′ z′(x) = z′′

получаем F(x ,z, z′) = 0 – уравнение I-го порядка.

**Пример 2.** y′′ – $\frac{y'}{x}$ = xex ; y′ = z(x); y′′= z′(x)

z′ – $\frac{z}{x}$ = x **∙** ex – линейное дифференциальное уравнение I-го порядка решаем методом Бернулли z = U **∙** V; z′= U′V + V′U; U′V + V′U – $\frac{UV}{x}$ = xex; V (U′ – $\frac{U}{x}$) + V′U = xex

Найдём функцию U из условия (U′ – $\frac{U}{x}$) = 0.

$\frac{dU}{dx}$ = $\frac{U}{x}$; $\frac{dU}{U}$ = $\frac{dx}{x}$; In U = In x; U = x, тогда V′x = xex; dV = ex dx; V = ex + C1

z = UV = x (ex + C1)

Вернёмся к исходной функции y′= x (ex + C1); dy = x (ex + C1) dx

 U = x dU = dx

y = ∫ xex dx + C1 ∫ xdx; ∫ xex dx = = xex – ∫ ex dx = xex – ex = ex (x – 1)

 ex dx = dV V = ex

 y = ex (x – 1) + C1 x2 / 2 + C2 – общее решение.

3) Уравнение, не содержащее независимой переменной х; F(y, y′, y′′) = 0

Метод решения: у – новая независимая переменная, тогда Р(у) = у′ – новая функция.

y′′= $\frac{dy'}{dx}$ = $\frac{dp}{dx}$ = $\frac{dp}{dy}$ **∙** $\frac{dy}{dx}$ = $\frac{dp}{dy}$ **∙** P y′′= P($\frac{dp}{dy}$)

 у(1) = 1

**Пример 3.** у3 **∙** у′′= –1, начальные условия

 у′(1) = 0

у3 **∙** у′′= –1; у′= Р(у); у′′= Р **∙** $\frac{dp}{dy}$; y3 **∙** P($\frac{dP}{dy}$) = –1; PdP = – $\frac{dy}{y3}$

$\frac{P2}{2}$ = $\frac{y-2}{2}$ + $\frac{C1}{2}$ или Р2 = у– 2 + С1

воспользуемся н.у.:

Р = 0; у = 1, найдём С1:

0 = 1 + С1 → С1 = –1

Р2 = у–2 – 1; Р = **√**$\frac{1-y2}{y2}$= √$\frac{1-y2}{y}$; P = $\frac{dy}{dx}$; dy = (√$\frac{1-y2}{y}$) dx; $\frac{ydy}{√1– y2}$ = dx

– $\frac{1}{2}$ **∙** 2 √1– y2 = x + C2; –√1– y2 = x + C2, найдём С2 при у = 1, х = 1

–√1– 1 = 1 + С2; С2 = –1; –√1– у2 = х – 1

**Ответ:** 1– х = √1– у2 – частное решение.

***Определение 1.*** *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* *называется уравнение вида: α0y(n) + α1y(n – 1) + … + αn – 1 y′ + αn y = b* **(1)**

*где α1 … αn, b – произвольные функции от х.*

Линейное – нет произведений и все функции, и производные в 1-й степени.

Если *α0(х) ≠ 0,* то уравнение записывают в «приведённом» виде.

*yn + p1(x) y(n – 1) + … + pn(x) y = ƒ(x)* **(2)**

Если *ƒ(х) ≡ 0*, то *уn + p1(x) y(n – 1) + … + pn(x) y = 0*  **(3)**

Линейное однородное дифференциальное уравнение.

№ 8

**Теорема 11.1.**Если функции у1 являются решением уравнения (3), то и функция С **∙** у1, есть решение этого уравнения.

**Теорема 11.2.** Если функция у1 и у2 является решением уравнения (3), то и функция у1 + у2, есть решение этого уравнения.

Линейной комбинацией функции у1 … уn называют выражения вида: y = C1y1 + C2y2 + … + Cnyn , где
C1 … Cn – произвольные постоянные.

**Теорема 11.3.**Если y1 … yn – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (3), то их линейная комбинация y = C1y1 + C2y2 + … + Cnyn.

***Определение 1.*** *Рассмотрим систему функций y1, y2 … yn определённых и непрерывных на одном и том же отрезке* **[a,b]**. *Эта система функций называется линейно зависимой на отрезке* **[a,b]**, *если существует n таких чисел α1 … αn , что выполняется соотношение:*

*α1y1 + α2y2 + … + αnyn = 0* **(4)**

*для всех х на данном отрезке. При этом предполагают, что числа α1 … αn не равны нулю одновременно.*

Линейная зависимость системы функций означает, что хотя бы одна из функций системы представляет собой линейную комбинацию остальных.

***Определение 2*.** *Если функции системы y1 … yn дифференцируем (n – 1) – раз, то из них можно построить определитель n-го порядка вида:*

 y1 y2 … yn

 y′1 y′2 … y′n  Это определитель

 W = … … … … Вронского (вронскиан)

 y1(n–1) y2(n–1) … yn(n–1)

**Теорема 11.4.** Если y1 … yn линейно независимые функции, удовлетворяющие некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению n-го порядка, то вронскиан такой системы не обращается в нуль ни в одной точке.

***Определение 3.*** *Систему частных решений y1 … yn линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка будем называть фундаментальной, если она состоит из n линейно независимых функций*.

Любое линейное однородное дифференциальное уравнение обладает бесконечным множеством фундаментальных систем.

**Теорема 11.5.** (об общем решении линейных однородных дифференциальных уравнении)

Если функции y1 … yn образуют фундаментальную систему решений уравнения (3), то их линейная комбинация y = C1y1 + C2y2 + … + Cnyn является общим решением однородного уравнения.

№ 9

***Определение 1.*** *Линейное однородное дифференциальное уравнение вида:*

*y(n) + p1y(n – 1) +… + pny = 0*  **(1)**

*в котором все коэффициенты p1 … pn являются постоянными, есть линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.*

Частные решения этого уравнения следует искать среди таких функций, которые в алгебраическом смысле подобны своим производным.

Будем искать частные решения в виде y = eλx, тогда:

y′ = λeλx

y′′ = λ2eλx

…

y(n) = λneλx

подставим в уравнение, получим:

λneλx + p1 **∙** λn – 1eλx +… + pneλx = 0

eλx (λn + λn – 1p1 +… + pn) = 0

eλx ƒ(λ) = 0 **(2)**

где ƒ(λ) – характеристический многочлен данного дифференциального уравнения.

Функция еλх тогда и только тогда удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянным коэффициентом (1), когда число λ является корнем характеристического уравнения ƒ(λ) = 0 **(3)**

Возможно несколько случаев корней характеристического уравнения:

1) Все корни действительные и разные.

Имеем n действительных корней λ1 … λn, каждому соответствует частное решение:

 λ1 → у1 = еλ1х

 λ2 → у2 = еλ2х фундаментальная система решений.

 λn → yn = eλnx

 Общее решение: y = c1eλ1x  + c2eλ2x +… + cneλnx

2) Все корни различны, но среди них имеются комплексные:

Если λ = α + bi – один из корней, то λ = α – bi – комплексно-сопряжённый ему, им соответствуют два частных решения yk = e(α +ib)x и ys = e(α – ib)x

Рассмотрим линейные комбинации этих решений, которые также являются решениями.

ỹk = yk + $\frac{ys}{2}$ и ỹs = yk – $\frac{ys}{2}$

Применим формулы Эйлера: cos x = eix + e–ix

sin x = eix – $\frac{e–ix}{2}$

тогда ỹk = e(α + ibx) + $\frac{e(α – ib)x}{2}$ = eαx **∙** (eib + $\frac{e–ib}{2}$) = eαx cos bx, аналогично ỹs = eαx sin bx, т.е. паре комплексных корней λ = α ± ib соответствуют решения ỹk = eαx cos bx; ỹs = eαx sin bx

3) Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

Если λ есть корень кратности, s то ему соответствуют s-линейно независимых решений:

y1 = eλx; y2 = xeλx … ys = xs – 1 **∙** eλx, при каждом совпадении корня в решение добавляется множитель х.

**Пример 1.** у′′ – 12у′ + 35у =0 λ1 = 5 λ2 = 7

у1 = е5х; у2 = е7х

**Пример 2.** у′′– 2у = 0 λ1 = 0 λ2 = 2

у1 = е0; у2 = е2х

**Пример 3.** у′′– 6у′ + 9у = 0 λ1.2 =3

у1 = е3х; у2 = хе3х

**Пример 4.** у′′– 6у′ + 25 = 0 λ1.2 = 3 ± 4i

у1 = е3х cos 4x; y2 = e3x sin 4x.

№ 10

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением называют уравнение вида:

y(n) + p1(x) y(n –1) + p2(x) y(n – 2) + … + pn(x) y = ƒ(x) **(1)**

**Теорема 11.6.** Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет сумму частного решения этого уравнения и общего решения, соответствующего однородного.

у = Y0 + Y\*

**Теорема 11.7.** Если правая часть неоднородного уравнения есть сумма двух функций ƒ1(х) + ƒ2(х), то частное решение такого уравнения можно получить как сумму частных решений аналогичных уравнений с правыми частями соответственно ƒ1(х) и ƒ2(х) (принцип наложения).

Способ неопределённых коэффициентов

Применяется для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Способ применим для уравнений с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части: показательные функции, синусы, косинусы, многочлены или их целые рациональные комбинации.

Частное решение следует искать в форме, аналогичной форме правой части.

**Случай 1:**

ƒ(x) = pn(x) – многочлен n-й степени.

y\*= Qn(x) – если среди корней характеристического уравнения нет λ1 = 0

у\*= xα **∙** Qn (x), если среди корней есть λ = 0, α – кратность корня

Qn – многочлен степени n с неизвестными коэффициентами, которые находятся после подстановки у\*

в уравнении (1).

**Случай 2:**

Вид правой части ƒ(х) = еαх или более общий Pn(x) **∙** eαx

Если α не является корнем характеристического уравнения (1), то частное решение ищем в виде:

y\*= Qn (x) **∙** eαx

Если α – корень характеристического уравнения (1), то y\*= xα Qn (x)eαx; α – кратность корня.

За Qn(x) нужно взять многочлен с буквенными коэффициентами n-й степени, коэффициенты определяются после подстановки у\* в уравнение (1).

**Пример 1.** у′′– 2у′+ у = х **∙** е3х λ1 = λ2 = 1 ≠ 3

у\*= е3х (Ах + В) → у\*= $\frac{1}{4}$е3х (х – 1)

**Пример 2.** у′′– у = 2ех λ1 = 1 λ2 = – 1 α = 1

у\*= ех **∙** А **∙** х → у\*= хех

**Пример 3.** у′′– 2у + у = хех λ1 = λ2 =1 α = 2

у\*= ех х2 (Ах + В)

**Случай 3:**

ƒ(х) = Рr(x) cos bx + Qs(x) **∙** sin bx

где Pr(x) и Qs(x) → многочлены степени r и соответственно.

Частное решение ищем в виде (если bi не корень характеристического уравнения).

y\*= Pm(x) **∙** cos bx + Qm(x) sin bx m = max(r, s)

Если bi – корень характеристического уравнения, то у\*= хα (Рm(x) cos bx + Qm(x) sin bx)

α – кратность корня

**Пример 4.** у′′+ 9у = 6 cos 3x – 30 sin 3x λ1.2 = ± 3i, 3i = b

Частное решение: y = x (A cos 3x + B sin 3x) A = 5, B = 1

**Случай 4:**

ƒ(х) = еαх **∙** (Pr(x) cos bx + Qs(x) sin bx)

y\*= xα eαx (Pm(x) cos bx + Qm(x) sin bx)

α = 0 – если среди корней характеристического уравнения нет числа z = α ±bi

α = 1 – если один из корней равен z

α = 2 – если 2 корня совпадают

**Пример 5.** у′′+ 9у = 9х4 + 12х2 – 27 λ1.2 = ± 3i

y\*= Ax4 +Bx3 + Cx2 + Dx +E

y\*= x4 – 3

**Пример 6.** у′′– 2у′= 6 + 12х – 24х2  λ1 = 0, λ2 = 2

у\*= (αx2 + bx2 + c) x α = 4, b =3, c = 3

y\*= 4x3 + 3x2 + 3x

№ 11

Применим к любому виду неоднородного линейного дифференциального уравнения:

Пусть известно общее решение соответствующего (1) однородного уравнения.

y0(x) = C1y1 + … + Cny1(x), тогда решение неоднородного уравнения ищите в виде

y(x) = C1(x) **∙** y1(x) + C2(x) **∙** y2(x) + … + Cn(x) **∙** yn(x)

где от функции C1 (x) … Cn(x) требуем, чтобы они удовлетворяли условиям.

 y1C′1 + y2C′2 + … + ynC′n = 0

 y′1C′2 + y′2C′2 + … + y′nC′n = 0

 …
 y1(n – 1)C1(n – 1)C′2 +… + yn(n – 1)C′n = ƒ

Эта неоднородная система уравнений. Так как определить системы есть вронскиан фундаментальной системы решений ≠ 0, то система имеет единственное решение относительно C′1 … C′2.

Рассмотрим уравнение II-го порядка:

y′′(x) + p(x) y′+ q(x) = ƒ(x)

y1(x) и у2(х) – фундаментальная система решений.

 у1 у2 0 y2  y1  0

 W = C′1(x) = ⁄ W C′2(x) = ⁄ W

 y′1 y′2  ƒ (x) y′2  y′1 ƒ (x)

**Пример 1.** у′′ – 2у′ + у = $\frac{еx}{x}$; λ2 – 2λ + 1 = 0 λ1.2 = 1

у = С1ех + С2ехх ex  exx

 W = = ex (ex + xex) – e2x = xe2x

у = С1 (х) ех + С2 (х) ехх ex ex + xex

 0 exx

 ‌ ∆C′1 (x) = = – ex **∙** x **∙** ex ⁄ x = – e2x

 ex ⁄ x ex + xex

 ex  0

 ∆C′2 (x) = = e2x ⁄ x

 ex  ex ⁄ x

C′1(x) = ∫ ($\frac{–e2x }{xe2x}$) dx = –∫ $\frac{dx}{x}$ = –ln |x| + C3

C′2(x) = ∫ $\frac{e2x }{(x ∙ xe2x)}$ dx = ∫ $\frac{dx }{x2}$ = $\frac{1 }{x}$ + C4

y = (C3 – ln |x|) ex + (C4 – $\frac{1 }{x}$) ex **∙** x = ex (C3 – ln |x| + C4 **∙** x – 1)

№ 12

Для описания некоторых процессов и явлений требуется несколько функций.

Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Система дифференциальных уравнений n-го порядка вида:

y′ = ƒ1 (x, y1…yn)

 y′2 = ƒ2 (x, y1…yn) **(1)**

 …

 y′n = ƒn (x, y1…yn)

называется нормальной системой дифференциальных уравнений.

Решение такой системы сводится к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка.

Решением системы (1) называется совокупность n-й функций φ1(х), φ2(х) … φn(х), удовлетворяющая всем уравнениям системы.

Нахождение решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие начальным условиям:

y1(x0) = y10; y2(x0) = y20 … yn(x0) = yn0

где x0, y0 … yn0 – заданные числа называемые начальными данными, называется задачей Коши.

**Пример 1.** Решение нормальной системы сведением к уравнению n-го порядка.

 x′ = x – y

 y′ = x + z Дифференцирование производится по переменной t.

 z′ = x + z – 4t

Эквивалентное уравнение:

 z′′′– 2z′′+ 2z′ = – 4t.

 z0 = C1 + et (C2 cos t + C3 sin t)

 z\* = –t2 – решение системы получим обратной подстановкой

 z = C1 + et (C2 cos t + C3 sin t)

 x = et ((C3 – C2) cos t – (C2 + C3) sin t) + 2t + 2 Параметрическая заданная интегральная кривая

 y = – C1 + et (C2 cos t + C3 sin t) + t2 – 2

Выражения, представляющие собой конечные соотношения между искомыми функциями и независимыми переменными, называют первыми интегралами системы.

Знание интегралов облегчает решение задачи: каждый первый интеграл позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

№ 13

Нормальная система дифференциальных уравнений (1) называется линейной, если функции ƒ1 … ƒ n – линейны относительно искомых функций.

 $\frac{dy}{dx}$ = α11y1 + α12y2 + … + αlnyn + b1

 $\frac{dy2}{dx}$ = α12y1 + α22y2 + … α2nyn + b2  **(2)**

 …

 $\frac{dyn}{dx}$ = αlny1 + αn2y2 + … + αnnyn + bn

Причём все коэффициенты (Aij) и (bi) – вообще говоря, являются произвольными функциями от х.

Если b1 … bn = 0, то система (2) называется однородной, если нет неоднородной.

Пусть (αij) = const, тогда система (2) – линейная система с постоянными коэффициентами, пусть также b1 … bn = 0.

 $\frac{dy1}{dx}$ = α11y1 + … + αlnyn

 …  **(3)**

 $\frac{dyn}{dx}$ = αnly1 + … + αnnyn

Система (3) приводится к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, поэтому будем искать решение (3) в виде показательных функций.

Частное решение ищем в виде у1 = γ1еλх; у2 = γ2еλх … yn = γneλx **(4)**

где γ1 … γn, λ – постоянные, которые следует подобрать так, чтобы функции (4) удовлетворяли системе (3).

Подставим (4) в (3), тогда

 λγ1еλх = α11γ1еλх + α12γ2еλх + … + α1nγneλx

 λγ2eλx = α21γ1eλx + α22γ2eλx + … + α2nγneλx

 …

 λγneλx = αn1γ1eλx + αn2γ2eλx + … + αnnγneλx

 сокращаем на еλх и переносим всё вправо.

 (α11 – λ)γ1 + α12γ2 + … + γ1nγn = 0

 α21γ1 + (α22 – λ)γ2 + … + γ2nγn = 0

 … **(5)**

 αn1γ1 + … + (αnn – λ)γn = 0

Система (5) – однородная система линейных уравнений из n-уравнений с n-неизвестным.

Чтобы система имела решение необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю.

 α11 – λ α12 … α1n

 α21 α22 – λ … α2n = 0 **(6)**

 … … … …

 αn1 αn2 … αnn – λ

Характеристическое уравнение системы (3)

Решим систему с использованием её характеристического уравнения:

Запишем систему в векторной форме х′ = А **∙** х, где

 x1 α11 … α1n  x′1

 x = x2 A = : : : x′= x′2

 : αn1  … αnn  :

 xn  x′n

 Тогда её характеристическое уравнение имеет вид.

 α11 – λ α12 … α1n

 α21 α22 – λ … α2n = 0, решаем его и находим значения λ

 : : : : (собственные значения матрицы А)

 αn1 … … αnn – λ

Каждому простому (действительному) корню λ, соответствует решение вида:

y1(i) = γ1(i)eλ1x; y2(i) = γ2(i)eλ1x … yn(i) = γn(i)eλ1x **(7)**

Ограничимся случаем, когда все корни характеристического уравнения действительные и разные.

Подставим решение вида (7) в уравнение (3) и сократим еλ1х

 (α11 – λi)γ1(i) + α12γ2(i) +…+ α1nγn(i) = 0

 α21γ1(i) + (α22 – λi)γ2(i) +…+ α2nγn(i) = 0

 …

 αn1γ1(i) + αn2γn(i) + … + (αnn – λi)γn(i) = 0

Эта система имеет множество решений. Достаточно найти одно частное решение, (значение коэффициентов γ1i … γni)

Все частные решения вида (7) образуют фундаментальную систему решений. Линейная комбинация всех частных решений с произвольными постоянными коэффициентами даёт общее решение системы.

 n

 у1 = ∑Сiy1(i)

 i = 1

 …

 n

 yn = ∑Ciyn( i )

 i = 1

**Пример 1.**  у1′= 4у1 – 5у2 4 – λ – 5

 у2′= у1 – 2у2 1 – 2 – 2 = 0 λ1 = – 1, λ2 = 3

γ11, γ21 – находим из решения системы γ12,γ22 – находим из решения системы

 5γ11 – 5γ21 = 0 γ11 = 1 1γ12 – 5γ22 = 0 γ12 = 5

 1γ11 – γ2 = 0 γ21 = 1 γ12 – 5γ22 = 0 γ22 = 1

 у11 = е – х  у21 = 5е3х

 у21 =е3х  у22 = е3х

 у1 = е1е – х + 5е3х

 у2 = е1е – х + е2е3х ← Общее решение