Отдел образования Мозырского районного исполнительного комитета
ГУО «Средняя школа №15 г.Мозыря имени генерала Бородунова Е.С.»

**План-конспект урока**

по алгебре для 11 классапо теме«Применение производной к доказательству и решению неравенств»

Выполнил:

Степанеев Николай Владимирович,

учитель математики и информатики,

ГУО «Средняя школа №15 г.Мозыря имени генерала Бородунова Е.С.»

Мозырь, 2019

**Цель урока:**

 **Образовательная:** Сформировать навыки доказательства и решения неравенств с помощью производной и научить применять полученные знания при решении задач практической направленности.

 **Воспитательная:** Воспитывать интерес к математике, дисциплинированность, самостоятельность, творческую активность.

 **Развивающая:** Способствовать развитию математического мышления, письменной речи, создать условия для стимулирования познавательной активности.

**План урока:**

1) Организационный момент

2) Актуализация знаний

3) Объяснение нового материала

4) Закрепление изученного материала

5) Домашнее задание

6) Итоги урока

|  |  |
| --- | --- |
| **Действие учителя** | **Действие ученика** |
| **1.** Обратить внимание на готовность класса к проведению урока. Поздороваться и представиться классу. Отметить отсутствующих. | **1.** Соблюдать порядок, сесть за парты. |
| **2.** Вспоминаем ранее пройденный материал, отвечая на вопросы:1. Что означает понятие «решить уравнение»?
2. Сформулируйте алгоритм (I) решения уравнений с помощью производной.
3. Сформулируйте алгоритм (II) для определения числа корней уравнения.
 | **2.** Отвечают на вопросы, предложенные учителем. |
| **3.** В предыдущих пунктах уже приводились примеры использования производной для решения уравнений. Покажем, как можно применять производную для доказательства и решения неравенств.Рассмотрим следующие задачи:**Пример №1.** Доказать, что $sinx<x$ для $x\in (0;\frac{π}{2})$*Доказательство:*Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=sinx-x.$ Исследуем ее на монотонность на промежутке $[0;\frac{π}{2}]\in D(f)$; $f^{'}\left(x\right)=cosx-1<0$ для $x\in (0;\frac{π}{2})$ и $cosx-1=0$ для $x=0\in (0;\frac{π}{2})$ откуда следует, что функция $f(x)$ убывает для $x\in (0;\frac{π}{2})$.Обозначим через $x\_{1}$левую границу отрезка: $x\_{1}=0, f\left(0\right)=0$. Тогда в силу убывания функции $f\left(x\right)=sinx-x$ на отрезке $[0;\frac{π}{2}]$ по определению убывающей функции для всех $x$ из этого отрезка получим $f\left(x\right)<f(0)$, т.е. $sinx-x<0$ или $sinx<x$.Доказано.На основании решения рассмотренной задачи можно составить *алгоритм (III) доказательства неравенств с помощью производной:*1. Привести неравенство к виду $f\left(x\right)>0$ $ (f\left(x\right)<0)$;
2. Найти область определения функции $ f\left(x\right);$
3. Исследовать функцию $ f\left(x\right)$ на монотонность и экстремумы на $ D(f\left(x\right))$ или промежутке, принадлежащем $ D(f\left(x\right))$;
4. Представить $ 0$ ( в правой части неравенства) как $ (f\left(a\right)∙(f\left(b\right))$;
5. Из неравенства $ x>a(x<b)$ сделать вывод:
* если функция возрастает, то $ f\left(x\right)>f\left(a\right)\leftrightarrow f\left(x\right)>0 (f\left(x\right)<f\left(b\right)\leftrightarrow f\left(x\right)<0)$;
* если функция убывает, то $f\left(x\right)<f\left(a\right)\leftrightarrow f\left(x\right)<0 (f\left(x\right)>f\left(b\right)\leftrightarrow f\left(x\right)>0)$;

Рассмотрим следующий пример:**Пример №2.** Верно ли неравенство $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$?*Решение:*1. Выполним некоторые преобразования $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}-2\sqrt[3]{3}<0$,

 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1}-2<0$1. Пусть, $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}-2$ ($x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$);
2. $f\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)=\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1}-2$,

так как $0<\frac{3}{\sqrt[3]{3}}<1$, то целесообразно рассматривать функцию на интервале $(-1;1)$. 1. $3f^{'}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x+1\right)^{2}}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^{2}}}=0\rightarrow x=0.$

При $x\in (-1;0)$ имеем $f^{'}\left(x\right)>0\rightarrow f\left(x\right)\uparrow $; при $x\in (0;1)$ имеем $f^{'}\left(x\right)>0\rightarrow f\left(x\right)\downright $; то есть точка $x=0$ – точка максимума, а так как данная точка единственная точка экстремума на интервале $(-1;1)$, то она является и точкой, в которой функция $f\left(x\right)$принимает наибольшее значение. 1. $f\left(x\right)=0 :f\left(x\right)<f\left(0\right)=0$

для $x\in (-1;0)∪(0;1)$. 1. Таким образом, $f\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\right)<0$,

т.е. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1}-2<0$. Следовательно, неравенство $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$ верное.На основании решения рассмотренной задачи сформулируем *алгоритм (IV) доказательства числовых неравенств с помощью производной:* 1. Привести неравенство к виду

$ f\left(x\_{1}\right)<f\left(x\_{2}\right)$ $(f\left(x\_{1}\right)>f\left(x\_{2}\right))$; 1. Определить функцию $f\left(x\right) $и исследовать ее на монотонность и экстремумы;
2. Сравнить значения функции в точках $x\_{1}$ и $x\_{2}$.
 | **3.** Слушают, необходимое конспектируют в тетрадь. |
| 1. Закрепляем материал, решая у доски.

**Задание №1.** Доказать, что при $x\in (0;\frac{π}{2})$ $cosx>1-\frac{x^{2}}{2}$*Доказательство:*Перенесем все слагаемые в левую часть, чтобы получить неравенство вида $f\left(x\right)>0$, где $f\left(x\right)=cosx-1+\frac{x^{2}}{2}$, Проведем исследование функции $f\left(x\right)$ на монотонность для $x\in (0;\frac{π}{2})\in D(f)$; найдем производную функции $f\left(x\right)$:$$f^{'}(x)=-sinx+x$$ В **примере №1** показано, что $sinx-x<0$, следовательно, при $x\in [0;\frac{π}{2}]\rightarrow $ $f^{'}\left(x\right)>0\rightarrow f\left(x\right)\uparrow $.Функция $f\left(x\right)$ непрерывна на $\left[0;\frac{π}{2}\right],$а производная функции равна нулю в одной точке этого отрезка, следовательно, функция возрастает на рассматриваемом отрезке. Обозначим через $x\_{1}$ левую границу отрезка: $x\_{1}=0, f\left(0\right)=0$. По определению возрастающей функции $f\left(x\_{1}\right)<f(x\_{2})$, то есть $f\left(x\right)>0$ для всех $x\in (0;\frac{π}{2})$. $f\left(x\right)=cosx-1+\frac{x^{2}}{2}$значит $cosx-1+\frac{x^{2}}{2}>0$, $cosx>1-\frac{x^{2}}{2}$.Доказано.**Задание №2.** Доказать, что для $x\in R$ выполняется неравенство $\frac{x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+1}}\geq 2$. *Доказательство:*1. $\frac{x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+1}}-2\geq 0$*.* Пусть $f\left(x\right)=\frac{x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+1}}-2$.
2. $D\left(f\left(x\right)\right)=R;$
3. $f^{'\left(x\right)}=\frac{x^{3}}{\sqrt{\left(x^{2}+1\right)^{2}}},$ $\frac{x^{3}}{\sqrt{\left(x^{2}+1\right)^{2}}}=0\rightarrow x=0.$

Если $x<0$, то $f^{'}\left(x\right)< 0\rightarrow f\left(x\right)\downright $, при $x>0$ имеем $f^{'}\left(x\right)>0\rightarrow f\left(x\right)\uparrow $.Значит $x=0$ – точка минимума, т.е. является и точкой наименьшего значения функции $f\left(x\right)$ на $D\left(f\right)$.1. Найдем значение функции $f\left(x\right)=\frac{x^{2}+2}{\sqrt{\left(x^{2}+1\right)^{2}}}$ в точке $x=0:$ $f(0)=0.$
2. Следовательно, для $x\in R$ выполнено $f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0$, то есть $\frac{x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+1}}-2\geq 0\rightarrow \frac{x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+1}}\geq 2$.

**Задание №3.** Верно ли неравенство$cos2011<1+cos2012$?*Решение:* 1. Перепишем данное неравенство в виде:

$2011+cos2011<2012+cos2012$,1. Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=x+cosx.$ Исследуя её на монотонность $(f'(x)=1-sinx\geq 0)$, получим, что функция возрастает для $x\in R$.
2. Пусть $x\_{1}=2011$, $x\_{2}=2012$, $x\_{2}\in R$,$ x\_{1}<x\_{2}$ , тогда $f\left(x\_{1}\right)<f(x\_{2})$, откуда следует, что $2011+cos2011<2012+cos2012\leftrightarrow cos2011<1+cos2012$

Неравенство оказалось верным.**Задание №4.** Доказать неравенство $e^{x}>-2+x+e^{2}$ для $x>2$*Доказательство:*1. $e^{x}+2-x-e^{2}>0$.

Пусть $f\left(x\right)=e^{x}+2-x-e^{2}$; 1. $D\left(f\right)=R$;
2. $f^{'}\left(x\right)=e^{x}-1>0$ для $x\geq 2\rightarrow f\left(x\right)\uparrow ;$
3. Пусть $x\_{1}=2, f\left(x\right)=0;$
4. $∀x\in [2;+\infty )$и $x>x\_{1}=2$ по определению возрастания функции имеем $f\left(x\right)>f\left(2\right)=0$, т.е.$ e^{x}+2-x-e^{2}>0$, $ e^{x}>-2+x+e^{2}$.

Доказано. | **4.** Выполняют задание предложенное учителем. |
| **5.** Домашняя работа. Стр. 50-64, п.1.8-1.101) Доказать, что при $x\geq 0$ справедливо неравенство $ln⁡(1+x)\geq \frac{2x}{x+2}$;2) Доказать, что при $x\in \left(0;\frac{π}{2}\right)$ $sinx>x-\frac{x^{3}}{6}$;3) Что больше sin2011 или 1+sin2012;4) Что больше log23 или log34. | **5.** Записывают домашнее задание. |
| **6.** Провести опрос по новой теме.1. Чего нового вы узнали на этом уроке?2. С какими для себя трудностями вы столкнулись?  | **6.** Отвечают, что нового они узнали на уроке. |